

וקטורים אקראיים דו-ממדיים רציפים

וקטור אקראי דו-ממדי רציף, הוא וקטור של שני משתנים מקריים רציפים.

לכל וקטור אקראי בדיד יש פונקציית צפיפות משותפת.

פונקציית צפיפות משותפת

פונקציית הצפיפות המשותפת של הווקטור האקראי (ו"א) הרציף (X, Y) היא פונקציה בשני משתנים, המסומנת $f_{X,Y}(x, y)$ ומוגדרת (הגדרה סתומה):

$$\iint_{(x,y) \in A} f_{X,Y}(x, y) \, dx dy = P((X, Y) \in A)$$

כמקרה פרטי $(A = [a, b] \times [c, d])$ מתקבל:

$$\iint_{x=a}^b \int_{y=c}^d f_{X,Y}(x, y) \, dx dy = P(a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d)$$

פונקציית צפיפות משותפת של ו"א דו-ממדי תמיד מקיימת:

$$f_{X,Y}(x, y) \geq 0 \quad : \quad x, y \text{ לכל} \quad (1)$$

$$\iint_{x=-\infty}^{\infty} \int_{y=-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) \, dx dy = 1 \quad (2)$$

שימו לב:

בדיוק כמו פונקציית צפיפות במקרה החד-ממדי הרציף, פונקציית צפיפות משותפת יכולה להיות בתחומים מסוימים גם גדולה מ-1.

פונקציית צפיפות שולית של X

תהי $f_{X,Y}(x, y)$ פונקציית הצפיפות המשותפת של הווקטור האקראי (X, Y) . פונקציית הצפיפות השולית של X , מתקבלת מתוך פונקציית הצפיפות המשותפת על-ידי:

$$f_X(x) = \int_{y=-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dy$$

(האינטגרל רץ על כל הערכים האפשריים של Y).

פונקציית צפיפות שולית של Y

תהי $f_{X,Y}(x, y)$ פונקציית הצפיפות המשותפת של הווקטור האקראי (X, Y) . פונקציית הצפיפות השולית של Y , מתקבלת מתוך פונקציית הצפיפות המשותפת על-ידי:

$$f_Y(y) = \int_{x=-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dx$$

(האינטגרל רץ על כל הערכים האפשריים של X).

אי תלות בין משתנים מקריים רציפים

יהיו X ו- Y שני משתנים מקריים רציפים. נאמר ש- X ו- Y הם משתנים מקריים בלתי תלויים, אם מתקיים לכל x, y :

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

אחרת, נאמר ש- X ו- Y הם משתנים מקריים תלויים.

תוחלת של פונקציה של וקטור אקראי רציף

נתונה $f_{X,Y}(x, y)$ פונקציית צפיפות משותפת של ו"א דו ממדי רציף (X, Y) , ונתונה $h(X, Y)$ – פונקציה כלשהי של X ו- Y .

אזי, התוחלת של $h(X, Y)$ ניתנת לביטוי ע"י הנוסחה:

$$E(h(X, Y)) = \int_{x=-\infty}^{\infty} \int_{y=-\infty}^{\infty} h(x, y) f_{X,Y}(x, y) dy dx$$

שונויות משותפת (קווריאנס)

בדומה למקרה הבדיד, השונויות המשותפת של X ו- Y מסומנת $Cov(X, Y)$, ושווה:

$$Cov(X, Y) = E[(X - E(X)) \cdot (Y - E(Y))] = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y)$$

תוחלת המכפלה של המשתנים המקריים ניתנת לחישוב כמקרה פרטי של נוסחת התוחלת של פונקציה של וקטור מקרי רציף:

$$E(X \cdot Y) = \int_{x=-\infty}^{\infty} \int_{y=-\infty}^{\infty} xy f_{X,Y}(x, y) dy dx$$

גם במקרה הרציף, הסימן של $Cov(X, Y)$ מראה על כיוון הקשר הלינארי בין X ו- Y :

$Cov(X, Y) > 0$ – ככל ש- X גדל ל- Y יש נטייה לגדול,

$Cov(X, Y) < 0$ – ככל ש- X גדל, ל- Y יש נטייה לקטון,

$Cov(X, Y) = 0$ – X ו- Y בלתי מתואמים.

מקדם המתאם (קורלציה)

גם במקרה הרציף, מקדם המתאם בין X ו- Y מסומן על-ידי $\rho_{X,Y}$, ומוגדר:

$$\rho_{X,Y} = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$$

כאשר:

$$\sigma_X = \sqrt{Var(X)} \text{ - סטית התקן של } X$$

$$\sigma_Y = \sqrt{Var(Y)} \text{ - סטית התקן של } Y$$

שימו לב של- $\rho_{X,Y}$ אותו סימן כמו ל- $Cov(X,Y)$, ולכן גם ממנו ניתן ללמוד על

כיוון הקשר הלינארי בין X ו- Y .

אך, שלא כמו $Cov(X,Y)$, תמיד מתקיים: $-1 \leq \rho_{X,Y} \leq 1$,

ומ- $\rho_{X,Y}$ ניתן ללמוד גם על עוצמת הקשר הלינארי בין X ו- Y .

ככל ש- $\rho_{X,Y}$ קרוב יותר ל-1, יש קשר לינארי חיובי חזק יותר בין X ו- Y ,

ככל ש- $\rho_{X,Y}$ קרוב יותר ל-1-, יש קשר לינארי שלילי חזק יותר בין X ו- Y .

אם $\rho_{X,Y} = 0$, נאמר ש- X ו- Y בלתי מתואמים.

משפטים:

גם במקרה הרציף מתקיים:

(1) אם X ו- Y משתנים מקריים בלתי תלויים אז הם בלתי מתואמים

(ההיפך לא בהכרח מתקיים).

(2) לכל X ו- Y :

$$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2 * Cov(X, Y)$$

$$Var(X - Y) = Var(X) + Var(Y) - 2 * Cov(X, Y)$$

(3) X ו- Y משתנים מקרים בלתי מתואמים אם ורק אם:

$$Var(X \pm Y) = Var(X) + Var(Y)$$

(4) X ו- Y משתנים מקרים בלתי מתואמים אם ורק אם:

$$E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$$

פונקציית התפלגות משותפת

גם במקרה הרציף ניתן להגדיר את פונקציית ההתפלגות המשותפת של הווקטור האקראי (X, Y) ע"י:

$$F_{X,Y}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$$

לכל x, y ממשיים.

הקשר בין פונקציית התפלגות משותפת לפונקציית צפיפות

משותפת:

אם (X, Y) ו"א רציף, מתקיים:

$$F_{X,Y}(x, y) = \int_{s=-\infty}^x \int_{t=-\infty}^y f_{X,Y}(s, t) dt ds$$

ובאופן דומה:

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{\partial F_{X,Y}(x, y)}{\partial x \partial y}$$

התניות בין משתנים מקריים רציפים

יהי (X, Y) ו"א רציף.

פונקציית הצפיפות המותנית של $\hat{Y}$ בהינתן $X=x$, מסומנת $f_{Y|X}(y|x)$, מוגדרת (הגדרה סתומה) ע"י:

$$\int_{y=a}^b f_{Y|X}(y|x) dy = P(a \leq Y \leq b | X = x)$$

וניתנת לחישוב כך:

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_X(x)}$$

נתונה פונקציית הצפיפות המותנית של Y בהינתן $X=x$.

התוחלת המותנית של Y בהינתן $X=x$ מסומנת $E[Y|X = x]$, וניתנת לחישוב כך:

$$E[Y|X = x] = \int_{y=-\infty}^{\infty} y f_{Y|X}(y|x) dy$$

אם המ"מים X ו- Y בלתי תלויים, אזי:

$$f_{Y|X}(y|x) = f_Y(y)$$

$$f_{X|Y}(x|y) = f_X(x)$$

וכן:

$$E[Y|X = x] = E[Y]$$

$$E[X|Y = y] = E[X]$$

נוסחת ההחלקה = נוסחת התוחלת השלמה

$$E[Y] = E\left[\underbrace{E[Y|X]}_{g(X)}\right] = \int_{x=-\infty}^{\infty} E(Y|X=x)f_X(x)dx$$

השוויון הראשון נקרא "נוסחת ההחלקה" והשוויון השני נקרא "נוסחת התוחלת השלמה". מכיוון שהתוחלת הפנימית בנוסחת ההחלקה היא למעשה פונקציה של X , הרי שהנוסחה הידועה לחישוב תוחלת של פונקציה, מסבירה את השוויון בין שתי הנוסחאות.

דוגמה

נתון: $Y|X=x$ מפולג מעריכית עם פרמטר x , כאשר $X \sim U(1,2)$.
חשבו את התוחלת של Y .

דרך א' – משפט התוחלת השלמה

$$\begin{aligned} E[Y] &= \int_{x=-\infty}^{\infty} E(Y|X=x)f_X(x)dx = \int_{x=0}^{\infty} E(Y|X=x) \cdot 1dx \\ &= \int_{x=1}^2 \frac{1}{x} \cdot 1dx = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2 \end{aligned}$$

דרך ב' – משפט ההחלקה

$$E[Y] = E[E[Y|X]] = E\left[\frac{1}{X}\right] = \int_{x=1}^2 \frac{1}{x} \cdot 1dx = \ln 2$$

הכללה לנוסחת ההחלקה

לכל פונקציה h ,

$$E[h(Y)] = E[E[h(Y)|X]]$$

שונויות מותנית (נוסחת עבודה)

$$\text{Var}(Y|X) = E[Y^2|X] - E^2[Y|X]$$

"משפט ההחלקה" לשונויות

$$\text{Var}(Y) = E(\text{Var}(Y|X)) + \text{Var}(E(Y|X))$$

דוגמה

בהמשך לשאלה הקודמת, חשבו את השונויות של Y

$$\begin{aligned}\text{Var}(Y) &= E(\text{Var}(Y|X)) + \text{Var}(E(Y|X)) = E\left(\frac{1}{X^2}\right) + \text{Var}\left(\frac{1}{X}\right) \\ &= E\left(\frac{1}{X^2}\right) + E\left(\frac{1}{X^2}\right) - E^2\left(\frac{1}{X}\right) \\ &= 2 \int_{x=1}^2 \frac{1}{x^2} \cdot 1 dx - (\ln 2)^2 = 2 \cdot \frac{1}{2} - (\ln 2)^2 = 0.519\end{aligned}$$

הסתברות שלמה

$$f_Y(y) = \int_{x=-\infty}^{\infty} f_{Y|X}(y|x) \cdot f_X(x) dx$$

משפט בייס

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{f_{Y|X}(y|x) \cdot f_X(x)}{\int_{x=-\infty}^{\infty} f_{Y|X}(y|x) \cdot f_X(x) dx}$$

הערה: אפשר להשתמש במשפט ההסתברות השלמה ובמשפט בייס גם כאשר אחד המשתנים המקריים הוא בדיד והשני הוא רציף. סכימה או אינטגרציה תבוצע בהתאם לסוג המשתנה המקרי שמתנים בו.

דוגמה

הזמן בין שתי מכוניות עוקבות מפולג $(\lambda) \exp$. כל מכונית היא אדומה בהסתברות p , ובאופן בלתי תלוי במכוניות אחרות. נגדיר: Y – הזמן עד שתעבור המכונית האדומה הראשונה. כיצד מתפלג Y ?

נשתמש במשפט הצפיפות השלמה, כאשר X – מספר המכוניות שעברו עד המכונית האדומה הראשונה.

תכונות העוונות המשותפת (קווריאנס) ומקדם המתאם

בדומה למקרה הבדיד:

<u>תכונות מקדם המתאם</u>	<u>תכונות הקווריאנס</u>
$-1 \leq \rho_{X,Y} \leq 1$	$-\infty < Cov(X,Y) < \infty$
$\rho_{X,Y} > 0$ קשר לינארי עולה	$Cov(X,Y) > 0$ קשר לינארי עולה
$\rho_{X,Y} < 0$ קשר לינארי יורד	$Cov(X,Y) < 0$ קשר לינארי יורד
$\rho_{X,Y} = 0$ אין קשר לינארי (X ו-Y בלתי מתואמים).	$Cov(X,Y) = 0$ אין קשר לינארי (X ו-Y בלתי מתואמים).

$\rho_{X,d} = 0$	$Cov(X, d) = 0$
$\rho_{X,X} = 1, \quad \rho_{X,-X} = -1$	$Cov(X, X) = Var(X)$
$\rho_{X,Y} = \rho_{Y,X}$	$Cov(Y, X) = Cov(X, Y)$
$\rho_{a \cdot X + b, c \cdot Y + d} = \begin{cases} \rho_{X,Y} & \text{if } a, c > 0 \\ & \text{or } a, c < 0 \\ -\rho_{X,Y} & \text{if } a > 0, c < 0 \\ & \text{or } a < 0, c > 0 \end{cases}$	$Cov(aX + b, cY + d) = acCov(X, Y)$
	$Cov(X, Y + Z) = Cov(X, Y) + Cov(X, Z)$ $Cov(X + Y, Z) = Cov(X, Z) + Cov(Y, Z)$ $Cov(X + Y, Z + W) = Cov(X, Z) + Cov(X, W) + Cov(Y, Z) + Cov(Y, W)$ וכך הלאה.

קונבולוציה

יהיו X, Y משתנים מקריים רציפים, בעלי פונקציית צפיפות משותפת $f_{X,Y}(x, y)$, ויהיה $Z = X + Y$.

פונקציית הצפיפות של Z ניתנת לחישוב ע"י:

$$f_Z(z) = \int_{x=-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, z-x) dx$$

דוגמה:

הוכח:

אם $X, Y \sim \exp(\lambda)$, כאשר X ו- Y בלתי-תלויים, אזי $X + Y \sim \text{Erlang}(2, \lambda)$.

הערות:

(1) ניתן להכליל את המשפט הזה לסכום של n מ"מים מעריכיים ב"ת (הוכחה באינדוקציה).

(2) ניתן להוכיח את הקשר הזה גם בעזרת פונקציה יוצרת מומנטים / התמרת לפלס.