תורת הקבוצות

# תורת הקבוצות היא תחום מתמטי, שחשוב להכירו לפני שלומדים את תורת ההסתברות. מדובר בתחום רחב מאוד, ולכן נתמקד כאן רק בנושאים שישמשו אותנו בהמשך.

# מושגים בסיסיים:

**קבוצה:**

אוסף של איברים (אלמנטים). מסומנת בדר"כ באותיות גדולות – A,B,C…

קבוצה יכולה לכלול מספר סופי או אינסופי של איברים. האיברים יכולים להיות מספרים, אנשים, קבוצות בעצמם, או כל דבר אחר.

**דוגמאות:**

הקבוצה היא סופית, וכוללת 4 איברים – כולם מספרים.

הקבוצה היא אינסופית, הכוללת מספרים (כל המספרים הגדולים מ-10).

הקבוצה היא קבוצה סופית, הכוללת 5 איברים – 3 מהם מספרים (1,2 ו-7), אחד מהם הוא קבוצה (הקבוצה {3,4,5}), ואחד איש (מוישה).

כפי שנראה בהמשך, אין כל חשיבות לסדר שבו אנחנו כותבים את האיברים בתוך הקבוצה.

**שייכות לקבוצה:**

אם x הוא איבר בקבוצה A, נכתוב , ונאמר: "x שייך ל-A"

אם x אינו איבר בקבוצה A, נכתוב , ונאמר: "x לא שייך ל-A"

בהמשך לדוגמאות הקודמות, אפשר לומר:

- המספר 2 הוא אחד האיברים בקבוצה A,

– המספר 12 הוא אחד האיברים בקבוצה B,

– הקבוצה {3,4,5} היא אחד האיברים בקבוצה C.

אבל:

- המספר 5 איננו אחד האיברים בקבוצה A,

– המספר 7 איננו הוא אחד האיברים בקבוצה B,

– המספר 3 איננו אחד האיברים בקבוצה C.

(5 איברי C פורטו לעיל, המספר 3 אינו אחד מהם!)

## פעולות בין קבוצות

כשם שבמספרים ניתן לבצע פעולות (חיבור, חיסור, כפל, חילוק, הוצאת שורש ועוד), כך גם בקבוצות ניתן לבצע פעולות.

הפעולות העיקריות שמוגדרות בקבוצות: איחוד, חיתוך הפרש, השלמה.

1. איחוד - "A איחוד B":

מסומן: , ומוגדר כקבוצת כל האיברים השייכים או ל-A או ל-B או לשתיהן, כלומר: כל האיברים השייכים לפחות לאחת משתי הקבוצות.

(המילה "או" משמשת כ-"ו/או").

דוגמה:

1. חיתוך - "A חיתוך B"

מסומן: , ומוגדר כקבוצת כל האיברים השייכים גם ל-A וגם ל-B.

דוגמה:

1. הפרש - "A הפרש B"

מסומן: A\B, ומוגדר כקבוצת כל האיברים הנמצאים ב-A אך לא ב-B.

דוגמה:

הפעולה הרביעית – פעולת ההשלמה – שונה באופייה משלוש קודמותיה. איחוד, חיתוך והפרש הן פעולות שמפעילים אותן בין שתי קבוצות ומקבלים קבוצה (כשם שאת פעולות החשבון – חיבור, חיסור כפל וחילוק מפעילים בין שני מספרים ומקבלים מספר). את פעולת ההשלמה, לעומת זאת, לא מפעילים בין שתי קבוצות, אלא על קבוצה בודדת – ומקבלים קבוצה (בכך היא דומה לפעולת הוצאת השורש הריבועי – אותה מפעילים על מספר ומקבלים מספר).

1. השלמה – "A משלים"

מסומנת: , ומוגדרת כקבוצת כל האיברים שאינם שייכים ל-A.

כאשר מדברים על "A משלים", צריך לדעת מהי אותה "קבוצה כוללת", שאליה יש להשלים את A. בהסתברות, הקבוצה הכוללת היא קבוצת כל התוצאות האפשריות בניסוי המדובר.

לדוגמה, אם הניסוי הוא הטלת קובייה פעם אחת, קבוצת כל התוצאות האפשריות היא {1,2,3,4,5,6},

ולכן, אם אז .

**משפטים:**

1. פעולות האיחוד והחיתוך מקיימות את תכונת החילוף (קומוטטיביות):

כמו שראינו בדוגמה, פעולת ההפרש אינה מקיימת את התכונה.

(בדומה לכך שבמספרים, חיבור וכפל מקיימים את התכונה, אך חיסור לא).

1. פעולות האיחוד והחיתוך מקיימות את תכונת הקיבוץ (אסוציאטיביות):

(בדומה לכך שבמספרים, חיבור וכפל מקיימים את התכונה).

1. מתקיימת תכונת הפילוג (דיסטריבוטיביות), גם של איחוד ביחס לחיתוך וגם של חיתוך ביחס לאיחוד:

(במספרים מתקיים פילוג של כפל ביחס לחיבור, אך לא של חיבור ביחס לכפל).

1. תכונות נוספות:

חוקי דה-מורגן:

הגדרות חשובות נוספות:

קבוצה ריקה:

מסומנת: Ø, ומוגדרת כקבוצה שאין בה אף איבר.

קבוצות זרות:

קבוצות A,B הן "קבוצות זרות", אם .

תמיד מתקיים:

# יחסים בין קבוצות

כשם שבין מספרים ניתן להגדיר יחסים (קטן מ-, גדול מ-, מחלק את ועוד), כך גם בקבוצות ניתן להגדיר יחסים.

היחסים העיקריים שמוגדרים בין קבוצות: הכלה, הכלה ממש, שוויון.

כשם שבמספרים ניתן לבצע פעולות (חיבור, חיסור, כפל, חילוק, הוצאת שורש ועוד), כך גם בקבוצות ניתן לבצע פעולות.

הפעולות העיקריות שמוגדרות בקבוצות: איחוד, חיתוך הפרש, השלמה.

1. יחס ההכלה – "A מוכל ב-B"

מסומן: , ומתקיים כאשר כל האיברים ששייכים לקבוצה A, שייכים גם לקבוצה B.

כאשר ניתן לומר גם ש-A היא "קבוצה חלקית" של B.

היחס ההפוך נקרא "לא מוכל", ומסומן: – "A לא מוכל ב-B".

היחס "לא מוכל" מתקיים אם ורק אם היחס "מוכל" אינו מתקיים.

דוגמה:

מתקיים , כי כל אחד מ-3 האיברים ב-A, הם איברים גם ב-B,

כמו-כן מתקיים , כי , אבל .

1. יחס השוויון – "A שווה ל-B"

מסומן: , ומתקיים כאשר לקבוצה A ולקבוצה B שייכים בדיוק אותם איברים.

במילים אחרות:

היחס ההפוך נקרא "שונה", ומסומן: – "A שונה מ-B".

היחס "שונה" מתקיים אם ורק אם היחס "שווה" אינו מתקיים.

דוגמה:

מתקיים , כי ל-A ול-B שייכים בדיוק אותם איברים – 1,2 ו-3.

הנה אנו רואים, שסדר הכתיבה של האיברים בתוך הקבוצה אינו משנה. הקבוצה A והקבוצה B הן שתי צורות רישום של אותה ישות מתמטית.

כמו-כן מתקיים , כי , אבל .

1. יחס ההכלה ממש – "A מוכל ממש ב-B"

מסומן: , ומתקיים כאשר וגם .

היחס ההפוך נקרא "לא מוכל ממש", ומסומן: – "A לא מוכל ממש ב-B".

היחס "לא מוכל ממש" מתקיים אם ורק אם היחס "מוכל ממש" אינו מתקיים.

דוגמה:

מתקיים , כי כל אחד מ-3 האיברים ב-A, הם איברים גם ב-B, וגם .

כמו-כן מתקיים , כי . (אבל כן נכון לומר ).

**משפטים:**

1. אם וגם , אז .

ועוד

הרחבות:

איחוד בין n קבוצות

1. איחוד של n קבוצות:

יהיו קבוצות. האיחוד של מוגדר:

1. חיתוך של n קבוצות:

יהיו קבוצות. החיתוך של מוגדר:

הרחבה של חוקי דה-מורגן ל-n קבוצות: