קומבינטוריקה

התחום המתמטי השני שחשוב להכיר לפני שניגשים לתורת ההסתברות הוא תחום הקומבינטוריקה. כמו תורת הקבוצות, מדובר בתחום רחב מאוד, שנלמד בקורסים נפרדים, ויובא כאן על קצה המזלג – בדגש על הנושאים שישמשו אותנו בתורת ההסתברות.

**מהי קומבינטוריקה?**

קומבינטוריקה היא "תורת המנייה", כלומר הכלים שמאפשרים לנו למצוא גדלים של קבוצות, מבלי לספור את איבריהן אחד אחד.

**עקרון הכפל**

אם בשלב 1 יש אפשרויות בחירה,

על כל אחת מהן יש בשלב 2 אפשרויות בחירה,

וכך הלאה עד שלב k, בו יש אפשרויות בחירה,

אזי סה"כ מספר אפשרויות הבחירה הוא .

**דוגמה 1**

בהטלת מטבע יש 2 תוצאות אפשרויות – עץ ופאלי (מעתה נשתמש בסימון המקובל: H ו-T),

בהטלת קובייה יש 6 תוצאות אפשריות – 1,2,3,4,5 ו-6.

בניסוי הכולל הטלת מטבע וקובייה יחד, יש על-פי עקרון הכפל אפשרויות.

ואכן, אם היינו סופרים את כל האפשרויות, היינו מגיעים ל-12, ולא במקרה:

(H,1) (H,2) (H.3) (H,4) (H,5) (H,6)

(T,1) (T,2) (T,3) (T,4) (T,5) (T,6)

**דוגמה 2**

בכמה אפשרויות ניתן לסדר 5 אנשים בשורה?

במקום הראשון יש 5 אפשרויות,

על כל אחת מהן יש 4 אפשרויות למקום השני,

על כל צירוף יש 3 אפשרויות למקום השלישי,

על כל שלישייה שכבר סדרנו יש 2 אפשרויות למקום הרביעי,

ולסוף השורה – תהיה בכל מקרה רק אפשרות אחת – האיש היחיד שטרם שובץ.

על-פי עקרון הכפל, מספר האפשרויות הכולל הוא .

**הגדרה - :**

לביטוי יש סימון מקוצר - – ובמילים "n עצרת", והוא מבטא, כאמור, את מספר האפשרויות לסדר n פריטים שונים בשורה – ובמילים אחרות "מספר התמורות של n פריטים".

עצרת מוגדרת כמתואר לעיל עבור כל מספר טבעי n,

ובנוסף מגדירים .

הערה: מספר האפשרויות לסדר n פריטים במעגל הוא , מתוך מוסכמה לפיה במעגל חשוב רק המקום היחסי של כל פריט – כלומר, מי נמצא מימינו ומי נמצא משמאלו, ולא המקום המוחלט.

**דוגמה 3א**

כמה "מילים" בנות 4 אותיות ניתן להרכיב מהאותיות א'-ט' ללא הגבלה?

("מילים" = צירופים של אותיות עם חשיבות לסדר ביניהן. אין הכרח של"מילה" תהיה משמעות).

מכיוון שלכל מקום ב"מילה" יש 9 אפשרויות, ויש 4 מקומות, מספר ה"מילים", לפי עקרון הכפל הוא .

ובאופן כללי, מספר האפשרויות לבחור k פריטים מתוך n, כאשר מותרות חזרות ויש חשיבות לסדר הבחירה הוא .

**דוגמה 3ב**

כנ"ל, אבל הפעם יש הגבלה: אסור להשתמש באותה אות יותר מפעם אחת.

הפעם, למקום הראשון יש 9 אפשרויות, על כל אחת מהן יש למקום השני 8 אפשרויות (כי אסור לחזור על האות שכבר השתמשנו בה), על כל צירוף יש למקום השלישי 7 אפשרויות, ולמקום הרביעי 6 אפשרויות.

סה"כ מספר המילים החוקיות הפעם הוא .

ובאופן כללי, מספר האפשרויות לבחור k פריטים מתוך n, כאשר אסורות חזרות ויש חשיבות לסדר הבחירה הוא

הביטוי הזה נקרא "חליפות" (פרמוטציות), ומסומן גם או (יש מקש כזה ברוב המחשבונים).

**דוגמה 3ג**

גם הפעם בוחרים 4 אותיות מתוך 9, ללא חזרות, אך הפעם לא יוצרים מהן מילה אלא קבוצה. כמה אפשרויות יש במקרה זה?

מה ההבדל? במילה יש חשיבות לסדר האותיות. המילה "אבגד" והמילה "בדאג" הן שתי מילים שונות, ואכן נספרו במסגרת 3,024 המילים כשתי מילים שונות. לעומת זאת, בקבוצה – כזכור – אין חשיבות לסדר בחירת הפריטים. הקבוצה {א,ב,ג,ד} והקבוצה {ב,ד,א,ג} הן בדיוק אותה קבוצה, ולכן צריכה להיספר פעם אחת בלבד.

אז כמה אפשרויות יש? בדוגמה הקודמת האותיות א', ב', ג', ד', יצרו מילים שונות (כמספר התמורות של 4 האותיות). בדוגמה הזאת, הן יוצרות רק קבוצה אחת – הקבוצה {א.ב.ג.ד}. למעשה, על כל אפשרויות שונות כשיש חשיבות לסדר, יש אפשרות אחת בלבד כשאין חשיבות לסדר. לכן יש לחלק את התשובה הקודמת ב-, והתשובה היא .

ובאופן כללי, מספר האפשרויות לבחור k פריטים מתוך n, כאשר אסורות חזרות ואין חשיבות לסדר הבחירה הוא

הביטוי הזה נקרא "צירופים" (קומבינציות), ומסומן גם או (גם מקש כזה קיים ברוב המחשבונים), אך הסימון המקובל ביותר, שבו בדר"כ משתמשים בקומבינטוריקה ובהסתברות הוא , והשם המקובל ביותר שלו הוא "המקדם הבינומי".

##### **סיכום דוגמה 3**

לסיכום דוגמה 3, מספר האפשרויות לבצע k בחירות מתוך n פריטים, תחת תנאים שונים, הוא כמפורט בטבלה הבאה:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | יש חשיבות לסדר הבחירה | אין חשיבות לסדר הבחירה |
| מותרות חזרות |  |  |
| אסורות חזרות |  |  |

כפי שניתן לראות, יש בטבלה משבצת ריקה – מספר האפשרויות לבצע k בחירות מתוך n, כאשר מותרות חזרות ואין חשיבות לסדר הבחירה. המקרה הזה כמעט ואינו שימושי בתורת ההסתברות, ולכן לא נתעכב עליו.

למי שמתעניין, נגלה רק שהתשובה היא .

##### **תכונות המקדם הבינומי**

מהאמור לעיל, אפשר להבין שהמקדם הבינומי יכול לתאר את מספר הקבוצות החלקיות בגודל k שיש לקבוצה בגודל n עצמים.

קל לראות שהמקדם הבינומי מקיים:

##### **המקדם המולטינומי**

המקדם הבינומי מתאר גם את מספר האפשרויות לסדר בשורה n פריטים, מתוכם k לבנים זהים ו- n-k שחורים זהים – כי הרי מדובר בדיוק בבחירת k מקומות מתוך ה-n עבור הכדורים הלבנים, ללא חזרות וללא חשיבות לסדר שבו מתבצעת הבחירה. דרך נוספת היא לחלק את התמורות של הפריטים ב-הסידורים הפנימיים של הלבנים וב- הסידורים הפנימיים של השחורים, ושוב מתקבל .

ניתן להרחיב את המקרה הבינומי למקרה מולטינומי, בו יש יותר משני סוגים של פריטים. אם, למשל, רוצים לסדר בשורה 5 פריטים אדומים זהים, 3 פריטים צהובים זהים ו-2 פריטים ירוקים זהים, מספר האפשרויות יהיה

ובאופן כללי, מספר האפשרויות לסדר בשורה n פריטים, מהם פריטים מסוג 1, פריטים מסוג 2, וכך הלאה עד סוג k, ממנו יש פריטים ((, הוא - וביטוי זה נקרא "מקדם מולטינומי".

1. נתונים n כדורים שונים. מספר האפשרויות להכניס:

כדורים לתא 1

כדורים לתא 2

כדורים לתא k

נתון על-ידי: