מרחבי הסתברות סימטריים

מקרה מיוחד הוא המקרה של מרחבי הסתברות סימטריים.

הגדרה למקרה הבדיד:

יהי (Ω, P) מרחב הסתברות בדיד הכולל מספר סופי של איברים.

(Ω, P) ייקרא "מרחב הסתברות סימטרי", אם לכל מאורע פשוט ב-Ω יש אותה הסתברות.

משפט: אם (Ω, P) מרחב הסתברות בדיד הכולל מספר סופי של איברים, מתקיים:

$$\forall \omega \epsilon \Omega, \qquad P(\{\omega\}) = \frac{1}{n(\Omega)}$$

ובהכללה:

$$\forall A \subseteq \Omega, \qquad P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

כאשר: $n(A)$ – מספר האיברים בקבוצה A,
$n(\Omega)$ – מספר האיברים בקבוצה Ω.

שימו לב!
זו דרך מוכרת לחישוב הסתברות – מספר האפשרויות הטובות חלקי מספר האפשרויות הקיימות. חשוב מאוד להשתמש בה נכון: לוודא שאכן מדובר במרחב הסתברות סימטרי, וש-A אכן מוכל במרחב המדגם.

דוגמה:
מטילים 2 קוביות הוגנות ("קובייה הוגנת" = קובייה שבה לכל תוצאה יש אותה הסתברות). מה ההסתברות שסכום התוצאות יהיה 4?

הניסוי הוא כמובן הטלת 2 קוביות הוגנות.

אך מהו מרחב המדגם?
יש מספר מרחבי מדגם שיכולים לתאר את התוצאות האפשריות של הניסוי, אך אם אנחנו רוצים להשתמש את ההסתברות המבוקשת כמספר תוצאות טובות חלקי מספר תוצאות קיימות, עלינו לבחור במרחב מדגם שכל אחד מהאיברים שלו מתקבל בהסתברות שווה.

מכיוון שהקוביות הן הוגנות, כלומר כל קובייה תראה את אחד המספרים השלמים שבין 1 ל-6 בהסתברות שווה, וללא השפעה על הקובייה השנייה, יהיה מרחב המדגם המתאים:

$$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2) | 1 \leq \omega_i \leq 6 \, , \omega_i \epsilon N \, , i = 1,2\}$$

ישנן דרכים נוספות לכתוב את אותו מרחב מדגם, למשל באמצעות מכפלה קרטזית:

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}\text{x}\{1,2,3,4,5,6\}$$

או (אם כי פחות אלגנטית), ע"י פירוט כל האיברים:

$$\begin{aligned}\Omega = \{&(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6),\\ &(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6),\\ &(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6),\\ &(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6),\\ &(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6),\\ &(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}\end{aligned}$$

בכל מקרה, $n(\Omega)$ יהיה מספר האפשרויות לבחור 2 מספרים מתוך 6, כאשר מותרות חזרות (ייתכן ששתי הקוביות יראו את אותו המספר) ויש חשיבות לסדר הבחירה (נקודה חשובה מאוד שתובהר בהמשך), כלומר $6^2 = 36$.

מי שבחרו לכתוב את Ω בדרך השלישית, כלומר ע"י פירוט כל האיברים, יכולים פשוט לספור ולהיווכח שאכן מדובר ב-36, אך דרך זה עשויה לעיתים לגזול זמן רב, ובדיוק בשביל שאלות כאלו הקדמנו ולמדנו קומבינטוריקה.

ומה בעניין $n(A)$? זה פשוט.

$$A = \{(\omega_1, \omega_2) | \omega_1 + \omega_2 = 4\} = \{(1,3), (2,2), (3,1)\}$$

ולכן $n(A) = 3$.

כמובן, צריך להתקיים $A \subseteq \Omega$, ולכן כשם שאיברי Ω הם זוגות סדורים, כך גם איברי A הם זוגות סדורים. התוצאות (1,3) ו-(3,1) נספרו בין 36 האפשרויות של Ω כשני מקרים שונים, ומכיוון ששניהם "מקרים טובים" (סכום ההטלות הוא 4) הם נספרים גם ב-A כשני מקרים שונים. וכמובן תוצאות כמו (4,0), למרות שהסכום הוא 4, אינן שייכות ל-Ω (זו אינה תוצאה אפשרית של ניסוי הטלת 2 קוביות), ולכן הן כמובן אינן שייכות ל-A.

והתשובה לשאלה היא אפוא $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

<u>מה אסור לעשות?</u>

אסור להשתמש בנוסחה כאשר המרחב הוא לא מרחב הסתברות סימטרי!

לדוגמה, אם נחליט שלא חשוב לנו הסדר בין 2 התוצאות, ונקבע שמרחב המדגם שלנו הוא כל הזוגות ללא חשיבות לסדר:

$$\Omega = \{\left\langle\begin{matrix}1\\1\end{matrix}\right\rangle, \quad \left\langle\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right\rangle = \left\langle\begin{matrix}2\\1\end{matrix}\right\rangle, \quad \left\langle\begin{matrix}2\\2\end{matrix}\right\rangle, \quad \left\langle\begin{matrix}1\\3\end{matrix}\right\rangle = \left\langle\begin{matrix}3\\1\end{matrix}\right\rangle, \quad \left\langle\begin{matrix}1\\4\end{matrix}\right\rangle = \left\langle\begin{matrix}4\\1\end{matrix}\right\rangle,$$
$$\left\langle\begin{matrix}2\\3\end{matrix}\right\rangle = \left\langle\begin{matrix}3\\2\end{matrix}\right\rangle, \quad \left\langle\begin{matrix}3\\3\end{matrix}\right\rangle, \dots \quad , \dots \quad \left\langle\begin{matrix}6\\6\end{matrix}\right\rangle\}$$

$n(\Omega)$ במקרה זה הוא מספר האפשרויות לבחור 2 מספרים מתוך 6 כשמותרות חזרות ואין חשיבות לסדר הבחירה. הקומבינטוריקה מלמדת אותנו שמספר האפשרויות הוא $\binom{2+6-1}{2} = \binom{7}{2} = 21$.

$n(A)$, מספר התוצאות (מתוך ה-21) שנותנות סכום הטלות 4 הוא 2.

אבל $P(A)$ היא בשום פנים ואופן לא 2/21!

כי מרחב ההסתברות שבחרנו הוא לא מרחב הסתברות סימטרי!

כשמתעלמים מהסדר בין הקוביות, יש הסתברות גבוהה יותר שתהיה קובייה שמראה 6 וקובייה שמראה 5, מאשר ששתי הקוביות יראו 6.

כדי לראות 6 ו-5 (ללא חשיבות לסדר) אפשר שקובייה אחת תראה 6 והשנייה 5 או ההיפך, בעוד שכדי ששתיהן יראו 6 – אין שתי אפשרויות, אלא רק אחת.

למעשה, $P\left(\left\{\left\langle\begin{matrix}6\\6\end{matrix}\right\rangle\right\}\right) = \frac{1}{36}$, בעוד ש-$P\left(\left\{\left\langle\begin{matrix}5\\6\end{matrix}\right\rangle = \left\langle\begin{matrix}6\\5\end{matrix}\right\rangle\right\}\right) = \frac{2}{36}$, אבל את זה אנחנו מבינים ממרחב המדגם המתאים שהגדרנו.

באופן דומה, אם נקבע שמרחב המדגם שלנו הוא כל התוצאות האפשריות כסכום הטלת 2 קוביות, כלומר $\Omega = \{2,3,\dots,12\} \to n(\Omega) = 11$, ו-$A = \{4\} \to n(A) = 1$, יהיה אסור להשתמש בנוסחה, כי גם כאן מרחב

ההסתברות אינו סימטרי – ההסתברות שסכום 2 הטלות יהיה 7 למשל, גבוה בהרבה (למען הדיוק – פי 6) מההסתברות שהסכום יהיה 2.

<u>דוגמה נוספת</u>

בכתה 20 בנים ו-15 בנות. בוחרים באקראי ועד של 5 תלמידים. חשבו את ההסתברות שבדיוק 3 מחברי הוועד יהיו בנים.

מרחב המדגם יהיה קבוצת כל הוועדים האפשריים. אין צורך לבטא את Ω כקבוצה, כפי שעשינו בדוגמה הקודמת. מספיק להבין שמדובר בבחירה של 5 מתוך 35, כשאסורות חזרות ואין חשיבות לסדר, ולכן $n(\Omega) = \binom{35}{5}$.

קבוצת הוועדים הטובים - $A \subseteq \Omega$ – היא קבוצת כל הוועדים שכוללים בדיוק 3 בנים. מספרם הוא כמספר האפשרויות לבחור 3 בנים מתוך ה-20, כשאסורות חזרות ואין חשיבות לסדר, כפול (עקרון הכפל) מספר האפשרויות לבחור באותם תנאים 2 בנות מתוך ה-15, שיכהנו גם הן בוועד.
כלומר $n(A) = \binom{20}{3} \cdot \binom{15}{2}$.

משמעות ה"בחירה באקראי" היא שלכל שני ועדים, כלומר לכל שני איברים של מרחב המדגם, יש אותה הסתברות, כלומר - מרחב ההסתברות שהגדרנו הוא סימטרי, ולכן התשובה לשאלה היא:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{\binom{20}{3} \cdot \binom{15}{2}}{\binom{35}{5}}$$

ואם תשאלו על סמך מה נקבע שאין חשיבות לסדר? אולי בוחרים את חברי הוועד בזה אחר זה? אולי לכל אחד מהם יש תפקיד שונה?
אולי, אבל אם נחשוב בהגיון – זה לא אמור להגדיל או להפחית את ההסתברות שבדיוק 3 מחברי הוועד יהיו בנים.
זה יגדיל את המכנה ואת המונה, כי עכשיו יש יותר אפשרויות, אך לא את היחס ביניהם. עכשיו החישוב יהיה:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{\left(\binom{20}{3} \cdot \binom{15}{2}\right) \cdot 5!}{\binom{35}{5} \cdot 5!} = \frac{\binom{20}{3} \cdot \binom{15}{2}}{\binom{35}{5}}$$

ההכפלה ב- 5! מחלקת את התפקידים השונים בין חברי הוועד.

לסיכום דוגמה זו, שתי הדרכים נכונות. חשוב לזכור שתמיד $A \subseteq \Omega$, ולכן אם ב-Ω יש חמישיות לא סדורות, ב-A יהיו חמישיות לא סדורות טובות, ואם ב-Ω יש חמישיות סדורות, ב-A יהיו חמישיות סדורות טובות.

הגדרה למקרה הרציף:

יהי (Ω, P) מרחב הסתברות רציף.

(Ω, P) ייקרא "מרחב הסתברות סימטרי", אם לכל המאורעות שבאותה מידה (אורך, שטח וכו' – על-פי ההקשר) ב-Ω יש אותה הסתברות.

משפט: אם (Ω, P) מרחב הסתברות רציף,

מתקיים:

$$\forall A \subseteq \Omega, \qquad P(A) = \frac{\|A\|}{\|\Omega\|}$$

כאשר: $\|A\|$ – המידה של A,
$\|\Omega\|$ – המידה של Ω.

שימו לב!
מכיוון שהמידה של נקודה היא 0, במרחב הסתברות רציף (ההסתברות של נקודה (למעשה – מאורע פשוט) היא 0.
ועדיין, לקטעים או לשטחים (הכוללים מספר לא בן-מנייה של נקודות), עשויה להיות הסתברות חיובית.
וכמובן – ההגדרה, ובעקבותיה כל התכונות של הסתברות, תקפות גם במרחבי הסתברות רציפים בכלל, ומרחבי הסתברות רציפים סימטריים בפרט.

דוגמה:
בוחרים נקודה באקראי בעיגול היחידה (עיגול שמרכזו בראשית הצירים ורדיוסו 1). מה ההסתברות שמרחק הנקודה ממרכז העיגול קטן או שווה ל-1/2?

הניסוי הוא כמובן בחירת נקודה בעיגול היחידה.

מרחב המדגם הוא עיגול היחידה.
ניתן לכתוב את מרחב המדגם גם כך:

$$\Omega = \{(x,y)|x^2 + y^2 \leq 1\}$$

השטח של Ω הוא $\|\Omega\| = \pi \cdot 1^2$.

מספר הנקודות במרחב מדגם זה אינו בן-מנייה.

המאורע שאת הסתברותו רוצים לחשב:
A – "מרחק הנקודה שנבחרה מהראשית קטן או שווה ל- 1/2".
מאורע זו הוא עיגול שמרכזו בראשית הצירים ורדיוסו 1/2.

ניתן לכתוב את A גם כך:

$$A = \{(x,y)|x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2}\}$$

השטח של A הוא $\|A\| = \pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$.

שימו לב!
משמעות ה"בחירה באקראי" בשאלה זו, היא שלכל שני שטחים המוכלים במרחב המדגם, שיש להם אותו שטח, יש אותה הסתברות.
זו תכונה חזקה יותר מהתכונה שלכל שתי נקודות יש אותה הסתברות.
האחרונה מתקיימת בכל מרחב הסתברות רציף (לאו דווקא סימטרי) – הסתברות 0 לכל נקודה.

לפיכך, לפנינו מרחב הסתברות רציף סימטרי, ומתקיים:

$$P(A) = \frac{\|A\|}{\|\Omega\|} = \frac{\pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2}{\pi \cdot 1^2} = \frac{1}{4}$$

<u>הערה:</u> לא ניתן להגדיר מרחב הסתברות סימטרי על מרחב מדגם הכולל מספר אינסופי בן-מנייה של איברים.