יסודות ההסתברות – מושגי יסוד

1. ניסוי – הליך שיש לו מספר תוצאות אפשריות.
2. מרחב המדגם – - קבוצת כל התוצאות האפשריות של הניסוי.
3. מאורע - - קבוצה חלקית של מרחב המדגם.

נאמר ש"מאורע  *התרחש", אם תוצאת הניסוי מקיימת .*

***לדוגמה,***

*ניסוי: הטלת קובייה פעם אחת.*

*מרחב המדגם: .*

*דוגמאות למאורעות:*

*- "יצא מספר זוגי",*

*- "יצא מספר קטן מ-5",*

*- "יצא 6".*

סוגי מאורעות:

מאורע פשוט – מאורע שכולל בדיוק איבר אחד ממרחב המדגם,

מאורע מורכב – מאורע שכולל יותר מאיבר אחד ממרחב המדגם,

המאורע הריק – Ø,

המאורע הוודאי - .

בדוגמה לעיל -  *מאורעות מורכבים, – מאורע פשוט.*

*לכל מאורע , קיים מאורע משלים , שהוא המאורע שמתרחש אם ורק אם מאורע אינו מתרחש, כלומר: .*

*בדוגמה לעיל:*

– "יצא מספר אי-זוגי",

– "יצא מספר גדול או שווה ל-5י",

– "לא יצא 6".

1. הסתברות (או "מידת הסתברות")

הסתברות היא פונקציה שהתחום שלה הוא מאורעות ב-והטווח שלה הוא הקטע [0,1], המקיימת את התכונות הבאות:

1. חיבוריות (אדיטיביות) בת-מניה:

אם מאורעות זרים, אז

**משפט** (תכונות נוספות של הסתברות, שאפשר להוכיח אותן בעזרת ההגדרה):

אם היא הסתברות, אז

1. חיבוריות סופית: אם מאורעות זרים, אז
2. הכלה והפרדה:

אם מאורעות (לאו דווקא זרים), אז

ובהכללה ל-3 מאורעות:

אם מאורעות (לאו דווקא זרים), אז

וניתן להכליל גם למספר גדול יותר של מאורעות.

1. אם אז
2. אם אז

**הערה:** ההגדרה של "הסתברות", אינה מחייבת סימטריה כלשהי. לדוגמה, בניסוי של הטלת קובייה, מותר להגדיר את כך ש- *, (וייתכן שאפשר גם לבנות קובייה כזו, כך ש-תתאר את מה שאנו רגילים לקרוא לו "סיכוי" או "הסתברות" בלשון המדוברת).*

*אבל אם בחרנו להגדיר כך את עבור שני המאורעות הפשוטים הנ"ל, אנחנו חייבים להגדיר אותה עבור המאורע המורכב כך ש-, אחרת תכונה 2 לא תתקיים (ואז תהיה אולי פונקציה מאוד יפה ממאורעות לקטע [0,1], אבל היא לא תהיה "הסתברות").*

*לכן, למעשה, במקרה של הטלת קובייה, צריך להגדיר את רק על 6 המאורעות הפשוטים, תוך הקפדה על כך שה"הסתברויות", כלומר התמונות של הפונקציה מסתכמות ל-1 (אחרת, לא יתקיימו התנאים שבהגדרה), כאשר של מאורע מורכב חייבת להיות סכום ה--ים של המאורעות הפשוטים המוכלים בו, כלומר .*

***דוגמה:***

*בהמשך לדוגמה מתחילת הפרק, נגדיר את ההסתברויות:*

)א*פשר לראות שהקובייה אינה סימטרית)*

*חשבו את , עבור המאורעות שהוגדרו לעיל.*

*פתרון:*

*.*

*מסעיף (1) בהגדרה ומתכונה (2) נובע:*

*ומכאן:*

*כלומר:*

*כמו-כן, מתכונה (2) נובע:*

1. מרחב הסתברות

*הזוג המורכב ממרחב מדגם ומהסתברות המוגדרת על המאורעות שלו, נקרא "מרחב הסתברות".*

*מרחב הסתברות יכול להיות בדיד או רציף.*

*מרחב הסתברות בדיד, הוא מרחב בו מספר האיברים ב- הוא סופי או בן-מנייה.*

*מרחב הסתברות רציף, הוא מרחב בו מספר האיברים ב- אינו בן מנייה.*

**דוגמאות**

1. בדוגמה *הקודמת, כלל מספר סופי של איברים (6), ולכן הוא* ***מרחב הסתברות בדיד.***
2. *ניסוי: הטלת מטבע שוב ושוב עד שמקבלים לראשונה .*

*מרחב המדגם:*

*ההסתברות תוגדר על המאורעות הפשוטים ב- כך:*

*(קל לוודא שזו אכן הסתברות. למעשה זו ההסתברות המתאימה למצב בו המטבע מראה בהסתברות 1/3, ואין תלות בין ההטלות השונות).*

*על המאורעות המורכבים תוגדר באופן החוקי היחיד –*

*.*

*בדוגמה זו כולל מספר בן-מנייה של איברים,*

*ולכן גם כאן הוא* ***מרחב הסתברות בדיד****.*

1. *ניסוי: בחירת נקודה בקטע [0,3].*

*מרחב המדגם: .*

*נגדיר את כך: (אכן מדובר בהסתברות).*

*כאן כולל מספר איברים שאינו בן-מנייה,*

*ולכן הוא* ***מרחב הסתברות רציף****.*