**נוסחת ההסתברות השלמה וכלל בייס**

**הגדרה:**

סדרת מאורעות $A\_{1},A\_{2},...$ נקרא חלוקה של מרחב המדגם, אם:

$$∀i,j A\_{i}∩A\_{j}=∅$$

$$\bigcup\_{i}^{}A\_{i}=Ω$$

החלוקה יכולה להיות למספר אינסופי או סופי של מאורעות.

נוסחת ההסתברות השלמה

יהיו $A\_{1},A\_{2},...$ מאורעות ב-Ω, בעלי הסתברויות חיוביות, המהווים חלוקה של Ω. יהי B מאורע ב-Ω. מתקיים:

$$P\left(B\right)=\sum\_{i}^{}P\left(B∩A\_{i}\right)=\sum\_{i}^{}P\left(B\left|A\_{i}\right.\right)⋅P\left(A\_{i}\right)$$

מתי משתמשים בנוסחת ההסתברות השלמה?

כשצריך לחשב הסתברות של מאורע, במצב בו אם היינו יודעים אם קרה מאורע אחר, היה יותר קל לחשב את ההסתברות (המותנית).

למשל, במצב שבו צריך לחשב הסתברות שניסוי דו-שלבי יסתיים בתוצאה מסוימת – מתנים בתוצאת השלב הראשון, ומשחררים מההתניה ע"י נוסחת ההסתברות השלמה.

**דוגמה:**

במפעל 3 מכונות.

מכונה 1 מייצרת 50% מתוצרת המפעל, ושיעור הפגומים שלה הוא 5%,

מכונה 2 מייצרת 30% מתוצרת המפעל, ושיעור הפגומים שלה הוא 7%,

מכונה 1 מייצרת 20% מתוצרת המפעל, ושיעור הפגומים שלה הוא 10%.

בוחרים באקראי מוצר שיוצר במפעל. מה ההסתברות שהוא פגום?

בשאלה זו, אם היינו יודעים באיזה מכונה יוצר המוצר, היה קל מאוד לדעת את ההסתברות שהוא פגום (למעשה, ההסתברויות המותנות האלו נתונות בשאלה). לכן, כדאי להשתמש בנוסחת ההסתברות השלמה, כשההתניה היא במכונה שבה המוצר יוצר.

נסמן:

 $B $– המוצר פגום

$A\_{1}$ *– המוצר יוצר במכונה 1* $P\left(A\_{1}\right)=0.05, P\left(A\_{1}\right)=0.5 \leftarrow $

$A\_{2}$ *– המוצר יוצר במכונה 2* $P\left(A\_{2}\right)=0.07, P\left(A\_{2}\right)=0.3 \leftarrow $

$A\_{3}$ *– המוצר יוצר במכונה 3* $P\left(A\_{3}\right)=0.10, P\left(A\_{3}\right)=0.2 \leftarrow $

$$P\left(B\right)=\sum\_{i}^{}P\left(B\left|A\_{i}\right.\right)⋅P\left(A\_{i}\right)=0.05⋅0.5+0.07⋅0.3+0.10⋅0.2=0.066$$

כלל בייס (Bayes):

בהמשך לנוסחת ההסתברות השלמה,

$$P\left(A\_{j}\left|B\right.\right)=\frac{P\left(B\left|A\_{j}\right.\right)⋅P\left(A\_{j}\right)}{P\left(B\right)}$$

$$\frac{P\left(B\left|A\_{j}\right.\right)⋅P\left(A\_{j}\right)}{\sum\_{i}^{}P\left(B\left|A\_{i}\right.\right)⋅P\left(A\_{i}\right)}$$

מתי משתמשים בכלל בייס?

כשצריך לחשב הסתברות מותנית של מאורע בהינתן מאורע אחר, במצב בו אם היו הופכים את הסדר, היה יותר קל לחשב את ההסתברות המותנית.

למשל, במצב שבו צריך לחשב הסתברות שהשלב הראשון של ניסוי דו-שלבי יסתיים בתוצאה מסוימת, כשידוע מה הייתה התוצאה הסופית של הניסוי – נעזרים בהסתברות ההפוכה ובהסתברויות לתוצאות השונות האפשריות לשלב הראשון, ומחשבים לפי כלל בייס.

**דוגמה:**

נוסיף סעיף נוסף לדוגמה הקודמת:

בוחרים באקראי מוצר שיוצר במפעל, והתברר שהוא פגום. מה ההסתברות שהוא יוצר במכונה 1?

כאן, השאלה ההפוכה (ידוע באיזו מכונה המוצר יוצר, ושואלים מה ההסתברות שהוא פגום) קלה יותר (למעשה, ההסתברויות המותנות האלו נתונות בשאלה). לכן, כדאי להשתמש בכלל בייס.

$$P\left(A\_{1}\left|B\right.\right)=\frac{P\left(B\left|A\_{1}\right.\right)⋅P\left(A\_{1}\right)}{\sum\_{i}^{}P\left(B\left|A\_{i}\right.\right)⋅P\left(A\_{i}\right)}= \frac{0.05⋅0.5}{0.05⋅0.5+0.07⋅0.3+0.10⋅0.2}=0.379$$

**הערה:** במכנה של כלל בייס מופיע הפיתוח של $P\left(B\right)$ לפי נוסחת ההסתברות השלמה. כמובן, שאפשר להשתמש עבור המכנה בתוצאה שקבלנו בסעיף הקודם. בכוונה הוצג כאן החישוב הארוך יותר, כדי להמחיש שאחד המחוברים מהמכנה (במקרה הזה – הראשון) עולה למונה.

אם היינו מתבקשים לחשב את ההסתברות שהמוצר, שידוע שהוא פגום, יוצר במכונה 2, המחובר השני היה זה שעולה למעלה, ואם היינו מתבקשים לחשב את ההסתברות שהמוצר, שידוע שהוא פגום, יוצר במכונה 3, המחובר השלישי היה זה שעולה למעלה.

כלומר:

$$P\left(A\_{2}\left|B\right.\right)=\frac{P\left(B\left|A\_{2}\right.\right)⋅P\left(A\_{2}\right)}{\sum\_{i}^{}P\left(B\left|A\_{i}\right.\right)⋅P\left(A\_{i}\right)}= \frac{0.07⋅0.3}{0.05⋅0.5+0.07⋅0.3+0.10⋅0.2}=0.318$$

$$P\left(A\_{3}\left|B\right.\right)=\frac{P\left(B\left|A\_{3}\right.\right)⋅P\left(A\_{3}\right)}{\sum\_{i}^{}P\left(B\left|A\_{i}\right.\right)⋅P\left(A\_{i}\right)}= \frac{0.10⋅0.2}{0.05⋅0.5+0.07⋅0.3+0.10⋅0.2}=0.303$$

הנה כי כן, העובדה שהמוצר שנבחר פגום, יוצרת התפלגות הסתברויות חדשה על המכונות.

אם לפני שנודעה התוצאה (אפריורית), ההסתברויות של מכונות 1, 2, 3 היו בהתאמה 0.5, 0.3, 0.2,

בהינתן התוצאה (אפוסטריורית), ההסתברויות המותנות של מכונות 1, 2, 3 הן בהתאמה 0.379. 0.318, 0.303.

מכונה 1 מייצרת 50% מהמוצרים, אך מכיוון ששיעור הפגומים בה נמוך יחסית לשאר המכונות, העובדה שמוצר פגום מפחיתה את ההסתברות שהוא יוצר במכונה 1 ל-37.9%.

מכונה 3 מייצרת 20% מהמוצרים, אך מכיוון ששיעור הפגומים בה גבוה יחסית לשאר המכונות, העובדה שמוצר פגום מגדילה את ההסתברות שהוא יוצר במכונה 3 ל-30.3%.