הסתברות מותנית ואי תלות

הגדרה:

יהיו A ו-B מאורעות במרחב המדגם Ω, כך ש- P(B)>0.

ההסתברות של A בהינתן B (במלים, אחרות: ההסתברות ש-A התרחש אם ידוע ש-B התרחש) מסומנת P(A|B), ומוגדרת:

$$P\left(A\left|B\right.\right)=\frac{P\left(A∩B\right)}{P\left(B\right)}$$

הסתברות זו מכונה גם "ההסתברות המותנית של A ב-B".

**דוגמה:**

ניסוי: מטילים קובייה הוגנת פעם אחת.

נתבונן במאורעות:

 A: התקבלה התוצאה "2"

 B: התקבלה תוצאה זוגית

ההסתברות המותנית של A ב-B:

$$P(A|B)=\frac{P(A∩B)}{P(B)}=\frac{P(\{2\})}{P(\{2,4,6\})}=\frac{1/6}{3/6}=\frac{1}{3}$$

ההסתברות המותנית של B ב-A:

$$P(B|A)=\frac{P(B∩A)}{P(A)}=\frac{P(\{2\})}{P(\{2\})}=\frac{1/6}{1/6}=1$$

תכונות ההסתברות המותנית

$$0\leq P\left(A\left|B\right.\right)\leq 1 ,A⊆Ω לכל$$

$$P\left(Ω\left|B\right.\right)=1$$

אם $A⊆B$, מתקיים $P\left(B\left|A\right.\right)=1$ *(כמו בדוגמה לעיל).*

אם $A,C$ מאורעות זרים, מתקיים:

$$P\left(A∪C\left|B\right.\right)=P\left(A\left|B\right.\right)+P\left(C\left|B\right.\right)$$

$$P\left(A^{C}\left|B\right.\right)=1-P\left(A\left|B\right.\right)$$

$P\left(∅\left|B\right.\right)=0$

הכלה והפרדה: $P\left(A∪C\left|B\right.\right)=P\left(A\left|B\right.\right)+P\left(C\left|B\right.\right)-P\left(A∩C\left|B\right.\right)$

כלל השרשרת:

עבור שני מאורעות: $P\left(A∩B\right)=P(A)·P\left(B\left|A\right.\right)$

הכללה:

$$P\left(A\_{1}∩A\_{2}∩…∩A\_{n}\right)=P\left(A\_{1}\right)⋅P\left(A\_{2}\left|A\_{1}\right.\right)⋅P\left(A\_{3}\left|A\_{1}∩A\_{2}\right.\right)⋅…⋅P\left(A\_{n}\left|\bigcap\_{j=1}^{n-1}A\_{j}\right.\right)$$

**דוגמה:**

בכד 10 כדורים אדומים ו-5 כדורים ירוקים.

מוציאים 3 כדורים ללא החזרה. מה ההסתברות ששלושתם אדומים?

פתרון:

אפשר לפתור בעזרת הנוסחה של מרחב הסתברות סימטרי,

ואפשר לפתור גם בעזרת כלל השרשרת.

נגדיר:

 $A\_{i}$ – הכדור ה-i שהוצאנו אדום ($(i=1,2,3$

$$P\left(A\_{1}∩A\_{2}∩A\_{3}\right)=P\left(A\_{1}\right)⋅P\left(A\_{2}\left|A\_{1}\right.\right)⋅P\left(A\_{3}\left|A\_{1}∩A\_{2}\right.\right)=\frac{10}{15}⋅\frac{9}{14}⋅\frac{8}{13}$$

בדוגמה הזו ההסתברויות המותנות ניתנות לחישוב מיידי, בהתאם למשמעיות שלהן, וללא צורך בשימוש בהגדרה.

אי תלות בין מאורעות

אי תלות בין שני מאורעות:

**הגדרה:**

יהיו A ו- B מאורעות המוגדרים באותו מרחב מדגם Ω.

A ו- B יקראו מאורעות בלתי תלויים זה בזה, אם מתקיים:

$$P\left(A\left|B\right.\right)=P\left(A\right)$$

$$P\left(B\left|A\right.\right)=P\left(B\right)$$

$$P\left(A∩B\right)=P\left(A\right)⋅P\left(B\right)$$

שימו לב! אם מתקיים אחד מ-3 התנאים הנ"ל, בהכרח מתקיימים גם ה-2 האחרים (הוכחה מיידית בעזרת ההגדרה של הסתברות מותנית.

אחרת, A ו- B יקראו מאורעות תלויים.

אי תלות בין n מאורעות:

**הגדרה:**

יהיו $A\_{1}, A\_{2},..., A\_{n}$ מאורעות המוגדרים באותו מרחב מדגם Ω. נאמר, כי $A\_{1},A\_{2},...,A\_{n}$ מאורעות בלתי תלויים זה בזה, אם לכל תת-קבוצה של אינדקסים $i\_{1}<i\_{2}<…<i\_{k} \left(2\leq k\leq n\right)$ מתקיים:

$$P\left(A\_{i\_{1}}∩A\_{i\_{2}}∩…∩A\_{i\_{k}}\right)=P\left(A\_{i\_{1}}\right)⋅P\left(A\_{i\_{2}}\right)⋅…⋅P\left(A\_{i\_{k}}\right)$$

כלומר, ההסתברות של החיתוך צריכה להיות שווה למכפלת ההסתברויות, לכל זוג מאורעות, וגם לכל שלישיית מאורעות וגם לכל רביעיית מאורעות, וכך הלאה.

שימו לב! ייתכן מצב שבו עבור כל זוג מ-3 מאורעות A,B,C, ההסתברות של החיתוך שווה למכפלת ההסתברויות, אבל אם נסתכל על כל השלישייה נמצא כי: $P\left(A∩B∩C\right)\ne P\left(A\right)⋅P\left(B\right)⋅P\left(C\right)$.

במקרה כזה נאמר שהמאורעות A,B,C תלויים.

**דוגמה**

מסובבים סביבון הוגן פעם אחת.

מרחב המדגם: $Ω=\{נ, ג, ה, פ\}$*.*

*נגדיר את המאורעות:*

$A=\{נ, ג\}$$P\left(A\right)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2} \leftarrow $*.*

$B=\{נ, ה\}$$P\left(B\right)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2} \leftarrow $*.*

$C=\{נ,פ\}$$P\left(C\right)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2} \leftarrow $*.*

*מתקבל:*

$A∩B=\{נ\}$$P\left(A∩B\right)=\frac{1}{4}=P(A)·P(B) \leftarrow $*.*

$B∩C=\{נ\}$$P\left(B∩C\right)=\frac{1}{4}=P(A)·P(B) \leftarrow $*.*

$A∩C=\{נ\}$$P\left(A∩C\right)=\frac{1}{4}=P(A)·P(C) \leftarrow $*.*

*אבל:*

$A∩B∩C=\{נ\}$

$$P\left(A∩B∩C\right)=\frac{1}{4}\ne P\left(A\right)·P\left(B\right)·P\left(C\right) \leftarrow $$

ולכן למרות ש- A,B,C*ב"ת בזוגות, נאמר ש-* A,B,Cתלויים.

**משפט:**

אם $A,B$ מאורעות ב"ת, אז גם:

$A,B^{C}$ ב"ת

 $A^{C},B$ ב"ת

$A^{C}, B^{C}$ ב"ת.

**טענה:**

מאורעות זרים שהסתברויותיהם חיוביות הם בהכרח תלויים

(מאורעות לא זרים יכולים להיות תלויים או בלתי תלויים)

**דוגמה:**

מטילים קובייה הוגנת פעם אחת

 A: התקבלה תוצאה זוגית $P(A)=\frac{1}{2}$

 B: התבלה תוצאה אי-זוגית $P(B)=\frac{1}{2}$

$$P(A∩B)=P(Ø)=0\ne P(A)·P(B)=\frac{1}{4}$$

בדוגמה זו מאורעות $A,B$ זרים$⇐$תלויים.

מאורעות שאינם זרים יכולים להיות תלויים או בלתי-תלויים.

**דוגמה:**

 A: התקבלה תוצאה זוגית $P(A)=\frac{1}{2}$

 B: התקבלה תוצאה קטנה או שווה 4 $P(B)=\frac{2}{3}$

$$A∩B=\{2,4\}⇒P(A∩B)=\frac{2}{6}=P(A)·P(B)=\frac{1}{2}⋅\frac{4}{6}$$

אם עורכים סדרה של n ניסויים שאינם תלויים זה בזה (כלומר, תוצאה של ניסוי אחד אינה משנה את הסתברויות תוצאות שאר הניסויים), כמו הטלת קובייה n פעמים, הוצאת כדורים מכד בזה אחר זה עם החזרה וכו',

ואם $A\_{1}, A\_{2},..., A\_{n}$ הם מאורעות, כך שלכל $i=1,2,...,n $, המאורע $A\_{i}$ נקבע רק לפי הניסוי ה-i, אז $A\_{1}, A\_{2},..., A\_{n}$ הם מאורעות ב"ת.

אי תלות בחיבורים טוריים ומקביליים

בחיבור טורי של רכיבים, המערכת תקינה אם ורק אם כל הרכיבים תקינים.

לכן, במערכות בחיבור טורי של n רכיבים בלתי תלויים, כאשר ההסתברות שרכיב i תקין היא $p\_{i}$ $(i=1,2,...,n) $,

ההסתברות שהמערכת תקינה היא $p\_{1}·p\_{2}∙…∙p\_{n}$

בחיבור מקבילי של רכיבים, המערכת תקינה אם ורק אם לפחות אחד הרכיבים תקין.

לכן, במערכות בחיבור מקבילי של n רכיבים בלתי תלויים, כאשר ההסתברות שרכיב i תקין היא $p\_{i}$ $\left(i=1,2,...,n\right)$,

ההסתברות שהמערכת תקינה היא $1-(1-p\_{1})(1-p\_{2})∙…∙(1-p\_{n})$