הסתברות מותנית ואי תלות

הגדרה:

יהיו A ו-B מאורעות במרחב המדגם Ω, כך ש- P(B)>0.

ההסתברות של A בהינתן B (במלים, אחרות: ההסתברות ש-A התרחש אם ידוע ש-B התרחש) מסומנת P(A|B), ומוגדרת:

הסתברות זו מכונה גם "ההסתברות המותנית של A ב-B".

**דוגמה:**

ניסוי: מטילים קובייה הוגנת פעם אחת.

נתבונן במאורעות:

A: התקבלה התוצאה "2"

B: התקבלה תוצאה זוגית

ההסתברות המותנית של A ב-B:

ההסתברות המותנית של B ב-A:

תכונות ההסתברות המותנית

אם , מתקיים  *(כמו בדוגמה לעיל).*

אם מאורעות זרים, מתקיים:

הכלה והפרדה:

כלל השרשרת:

עבור שני מאורעות:

הכללה:

**דוגמה:**

בכד 10 כדורים אדומים ו-5 כדורים ירוקים.

מוציאים 3 כדורים ללא החזרה. מה ההסתברות ששלושתם אדומים?

פתרון:

אפשר לפתור בעזרת הנוסחה של מרחב הסתברות סימטרי,

ואפשר לפתור גם בעזרת כלל השרשרת.

נגדיר:

– הכדור ה-i שהוצאנו אדום (

בדוגמה הזו ההסתברויות המותנות ניתנות לחישוב מיידי, בהתאם למשמעיות שלהן, וללא צורך בשימוש בהגדרה.

אי תלות בין מאורעות

אי תלות בין שני מאורעות:

**הגדרה:**

יהיו A ו- B מאורעות המוגדרים באותו מרחב מדגם Ω.

A ו- B יקראו מאורעות בלתי תלויים זה בזה, אם מתקיים:

שימו לב! אם מתקיים אחד מ-3 התנאים הנ"ל, בהכרח מתקיימים גם ה-2 האחרים (הוכחה מיידית בעזרת ההגדרה של הסתברות מותנית.

אחרת, A ו- B יקראו מאורעות תלויים.

אי תלות בין n מאורעות:

**הגדרה:**

יהיו מאורעות המוגדרים באותו מרחב מדגם Ω. נאמר, כי מאורעות בלתי תלויים זה בזה, אם לכל תת-קבוצה של אינדקסים מתקיים:

כלומר, ההסתברות של החיתוך צריכה להיות שווה למכפלת ההסתברויות, לכל זוג מאורעות, וגם לכל שלישיית מאורעות וגם לכל רביעיית מאורעות, וכך הלאה.

שימו לב! ייתכן מצב שבו עבור כל זוג מ-3 מאורעות A,B,C, ההסתברות של החיתוך שווה למכפלת ההסתברויות, אבל אם נסתכל על כל השלישייה נמצא כי: .

במקרה כזה נאמר שהמאורעות A,B,C תלויים.

**דוגמה**

מסובבים סביבון הוגן פעם אחת.

מרחב המדגם: *.*

*נגדיר את המאורעות:*

*.*

*.*

*.*

*מתקבל:*

*.*

*.*

*.*

*אבל:*

ולכן למרות ש- A,B,C*ב"ת בזוגות, נאמר ש-* A,B,Cתלויים.

**משפט:**

אם מאורעות ב"ת, אז גם:

ב"ת

ב"ת

ב"ת.

**טענה:**

מאורעות זרים שהסתברויותיהם חיוביות הם בהכרח תלויים

(מאורעות לא זרים יכולים להיות תלויים או בלתי תלויים)

**דוגמה:**

מטילים קובייה הוגנת פעם אחת

A: התקבלה תוצאה זוגית

B: התבלה תוצאה אי-זוגית

בדוגמה זו מאורעות זריםתלויים.

מאורעות שאינם זרים יכולים להיות תלויים או בלתי-תלויים.

**דוגמה:**

A: התקבלה תוצאה זוגית

B: התקבלה תוצאה קטנה או שווה 4

אם עורכים סדרה של n ניסויים שאינם תלויים זה בזה (כלומר, תוצאה של ניסוי אחד אינה משנה את הסתברויות תוצאות שאר הניסויים), כמו הטלת קובייה n פעמים, הוצאת כדורים מכד בזה אחר זה עם החזרה וכו',

ואם הם מאורעות, כך שלכל , המאורע נקבע רק לפי הניסוי ה-i, אז הם מאורעות ב"ת.

אי תלות בחיבורים טוריים ומקביליים

בחיבור טורי של רכיבים, המערכת תקינה אם ורק אם כל הרכיבים תקינים.

לכן, במערכות בחיבור טורי של n רכיבים בלתי תלויים, כאשר ההסתברות שרכיב i תקין היא ,

ההסתברות שהמערכת תקינה היא

בחיבור מקבילי של רכיבים, המערכת תקינה אם ורק אם לפחות אחד הרכיבים תקין.

לכן, במערכות בחיבור מקבילי של n רכיבים בלתי תלויים, כאשר ההסתברות שרכיב i תקין היא ,

ההסתברות שהמערכת תקינה היא