משתנים מקריים רציפים

הגדרה
משתנה מקרי רציף הוא מ"מ שההסתברות שלו להיות שווה לכל אחד מהמספרים הממשיים היא אפס.
הדבר אפשרי רק כאשר קבוצת הערכים שהוא יכול לקבל היא קבוצה אינסופית שאינה בת-מנייה.

דוגמה
נסוי: בוחרים באקראי נקודה בעיגול היחידה (עיגול שמרכזו בראשית הצירים ורדיוסו 1).
מרחב המדגם: $\Omega = \{(x, y)|x^2 + y^2 \leq 1\}$

נגדיר מ"מ R – מרחק הנקודה שנבחרה מראשית הצירים.
כלומר:

$$R: \Omega \to \mathcal{R}$$

$$\omega = (x, y)\epsilon\Omega \quad \to \quad R((x, y)) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

כאן התחום מורכב מזוגות סדורים, והמ"מ מתאים לכל זוג סדור מספר ממשי. קבוצת הערכים שהמ"מ יכול לקבל היא קבוצה אינסופית שאינה בת מניה – במקרה זה כל הנקודות בקטע $[0,1]$, וההסתברות לכל נקודה היא אפס.

תזכורת: בבחירת נקודה באקראי בשטח Ω, מתקיים:

$$A \subseteq \Omega \quad \Rightarrow \quad \mathrm{P(A)} = \frac{\|A\|}{\|\Omega\|}$$

וכאשר $A = \{(x, y)|R((x, y)) = r\}$, עבור כל $0 < r \leq 1$ - מאורע A הוא טבעת ברדיוס r סביב ראשית הצירים, ושטחה (לא השטח הכלוא בתוכה, אלא השטח שלה עצמה) הוא אפס, ומכאן שגם ההסתברות היא אפס,
והמשתנה המקרי R הוא משתנה מקרי רציף.

לכל משתנה מקרי רציף יש פונקציית צפיפות.

<u>הגדרה</u>

<u>פונקציית צפיפות של מ״מ רציף</u> – מסומנת f_X היא פונקציה המקיימת:

$$P(a \le X \le b) = \int_a^b f_X(x)dx$$

גם מהגדרה זו ניתן לראות שתמיד מתקיים:

$$P(X = x) = \int_x^x f_X(t)dt = 0$$

<u>תכונות פונקציית הצפיפות</u>

מהגדרת f_X אפשר לראות שהיא תמיד מקיימת:

1. $\forall x,\ f_X(x) \ge 0$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$

<u>פונקציית התפלגות של מ״מ רציף</u>, F_X , מוגדרת בדיוק כמו שהוגדרה פונקציית התפלגות של מ״מ בדיד, כלומר:

$$F_X\colon \mathrm{R} \to [0,1]$$

$$x\epsilon R \quad \to \quad F_X(\mathrm{x}) = P(\{\omega\colon X(\omega) \le x\})$$

<u>מציאת $F_X(x)$ לפי $f_X(x)$</u>

יהי X מ״מ רציף בעל פונקציית צפיפות f_X. מהגדרת f_X נובע:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \boldsymbol{f_X(t)dt}$$

כמו במ״מ בדיד, גם פונקציית התפלגות של משתנה מקרי רציף תמיד מקיימת:

1. $\forall x_1 < x_2,\ F_X(x_1) \le F_X(x_2)$ (מונוטונית לא-יורדת)
2. $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$, $\lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1$

אבל בעוד שבמקרה הבדיד, נדרשה רק רציפות מימין,
הרי שבמקרה הרציף, פונקציית ההתפלגות היא פונקציה רציפה בכל נקודה
– גם מימין וגם משמאל, כלומר מתקיים:

$$F_X(x) = \lim_{t \to x} F_X(t) .$$

מציאת $f_X(x)$ לפי $F_X(x)$

אם X הוא משתנה מקרי רציף, $F_X(x)$ היא כאמור פונקציה רציפה,
ו-$f_X(x)$ היא הנגזרת של $F_X(x)$ בנקודה x.

כלומר:
$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} .$$

דוגמה

בהמשך לדוגמה הקודמת:

פונקציית ההתפלגות של R היא:

$$F_R(r) = P(R \le r) = \begin{cases} 0 & r < 0 \\ \dfrac{\pi r^2}{\pi \cdot 1^2} = r^2 & 0 \le r < 1 \\ 1 & 1 \le r \end{cases}$$

ולפיכך, פונקציית הצפיפות של X היא:

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = \begin{cases} 2r & 0 \le r < 1 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

וניתן לראות שגם פונקציית ההתפלגות וגם פונקציית הצפיפות מקיימות
את התכונות הנדרשות.

תוחלת של מ״מ רציף

יהי X משתנה מקרי רציף.
התוחלת של X מסומנת $E(X)$ ומוגדרת:

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx$$

בתנאי שהאינטגרל מתכנס
(אם האינטגרל מתבדר, נאמר של-X אין תוחלת).

התוחלת היא, למעשה, ממוצע משוקלל של הערכים ש-X יכול לקבל, כאשר השקלול נעשה בצורה רציפה, בעזרת פונקציית הצפיפות.

תוחלת של פונקציה של מ״מ רציף

יהי X משתנה מקרי רציף, ו-g פונקציה כלשהי.
התוחלת של $g(X)$ מסומנת $E(g(X))$ וניתנת לחישוב ע״י:

$$E(g(X))=\int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)dx$$

בתנאי שהאינטגרל מתכנס
(אם האינטגרל מתבדר, נאמר של-$g(X)$ אין תוחלת).

שימו לב! אפשר גם להגדיר $Y=g(X)$, לחשב את $f_Y(y)$ (״טרנספורמציות״), ובעזרתה לחשב את $E(Y)=E(g(X))$ לפי הגדרת התוחלת. אך בדר״כ, אם נדרשת רק התוחלת של Y ולא פונקציית הצפיפות שלו, יהיה קל יותר להשתמש בנוסחת התוחלת של פונקציה.

<u>דוגמה</u>
בהמשך הדוגמה הקודמת, נחשב את $E(R)$:

$$E(R)=\int_{-\infty}^{\infty} r f_R(r)dr=\int_0^1 r\cdot 2rdr=\frac{2r^3}{3}\Big|_0^1=\frac{2}{3}$$

התוצאה $E(R)=2/3$ אכן הגיונית מאוד, מכיוון שהיא נמצאת בתחום הערכים של המשתנה המקרי (במקרה זה – בין 0 ל-1), ובחלק הגבוה שלו, שם מרוכזת במקרה זה רוב המסה.

<u>ובהמשך לדוגמה</u>, נניח שאנו מעוניינים דווקא בתוחלת של שורש מרחק הנקודה מראשית הצירים, כלומר ב- $E(\sqrt{R})$.
אפשר להשתמש בנוסחת התוחלת של פונקציה, ולקבל:

$$E(\sqrt{R}) = \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{r} \cdot f_R(r)dr = \int_0^1 \sqrt{r} \cdot 2rdr = \frac{2r^{2.5}}{2.5}\Big|_0^1 = \frac{4}{5}$$

תכונות התוחלת

גם תוחלת של מ״מ רציף מקיימת את התכונות שמקיימת תוחלת של מ״מ בדיד, כלומר

א. $E(aX+b) = aE(X) + b \qquad \forall a, b \in R$

ב. $E(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$

שונות וסטיית תקן

יהי X משתנה מקרי רציף.

השונות של X מסומנת $Var(X)$ ומוגדרת, כמו במקרה הבדיד:

$$Var(X) = E((X - E(X))^2)$$

אך הפעם, החישוב על-פי ההגדרה יהיה:

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 \cdot f_X(x)dx$$

בתנאי שהאינטגרל מתכנס

(אם האינטגרל מתבדר, נאמר של-X אין שונות).

בדרך כלל יהיה קל יותר לחשב שונות של משתנה מקרי בעזרת נוסחת העבודה, ולא ישירות לפי ההגדרה.

כזכור, נוסחת העבודה לשונות היא:

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

תכונות השונות, כמו במקרה הבדיד:

א. $Var(aX+b) = a^2 Var(X) \qquad \forall a, b \in R$

ב. אם $X_1, X_2, \dots, X_n$ מ״מים ב״ת,

$Var(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i)$

דוגמה

בהמשך לדוגמה הקודמת, נחשב את שונות מרחק הנקודה מראשית הצירים. נעשה זאת בעזרת נוסחת העבודה:

$$Var(R) = E(R^2) - E^2(R)$$

$$E(R^2) = \int_{-\infty}^{\infty} r^2 \cdot f_R(r)dr = \int_0^1 r^2 \cdot 2rdr = \frac{2r^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$E(R) = \frac{2}{3}$$

$$Var(R) = \mathrm{E}(\mathrm{R}^2) - \mathrm{E}^2(R) = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}$$

סטיית תקן, כמו במקרה הבדיד:

$$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$$

ומתקיים:

א. $\forall a, b \in R \qquad \sigma(a\mathrm{X}+\mathrm{b}) = |a|\sigma(X)$

ב. היחידות של $\sigma(X)$ הן אותן יחידות כמו של X.

מומנטים

המומנט ה-r של משתנה מקרי X הוא $E(X^r)$, כמו במקרה הבדיד, אך במקרה הרציף הוא מחושב כך:

$$E(X^r) = \int_{-\infty}^{\infty} x^r \cdot f_X(x)dx$$

.

פונקציה יוצרת מומנטים, מוגדרת כמו במקרה הבדיד:

$$M_X(t) = E(e^{tX})$$

כאשר במקרה הרציף היא מחושבת כך:

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \cdot f_X(x)dx$$

התמרת לפלס, במקרה הרציף מחושבת (עבור אי-שליליים):

$$\varphi_X(t) = E(e^{-tX}) = \int_{0}^{\infty} e^{-tx} \cdot f_X(x)dx$$

ופונקציה אופיינית:

$$\psi_X(t) = E\left(e^{itX}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \cdot f_X(x)dx$$

וכל תכונות ההתמרות שמתקיימות במקרה הבדיד, מתקיימות גם במקרה הרציף.

נוסחת הזנב

יהי X משתנה מקרי רציף המקבל ערכים אי-שליליים.

"נוסחת הזנב" לחישוב התוחלת של X במקרה הרציף:

$$E(X) = \int_{x=0}^{\infty} (1 - F_X(x))dx = \int_{x=0}^{\infty} P(X > x)dx$$

טבלת סיכום למשתנים מקריים רציפים

פונקציית צפיפות:	$f_X(x)$ $P(a \le X \le b) = \int_a^b f_X(x)dx$ מקיימת: $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1 \ , \ f_X(x) \ge 0$
פונקציית התפלגות:	$F_X(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$
תוחלת:	$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx$
תוחלת של פונקציה:	$E\big(g(X)\big) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)dx$
מומנט מסדר r:	$E(X^r) = \int_{-\infty}^{\infty} x^r f_X(x)dx$
שונות:	$Var(X) = E\big(\big(X - E(X)\big)^2\big) = E(X^2) - E^2(X)$
סטיית תקן:	$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$
פונקציה יוצרת מומנטים:	$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X(x)dx$
התמרת לפלס:	$\varphi_X(t) = E(e^{-tX}) = \int_{0}^{\infty} e^{-tx} f_X(x)dx$
פונקציה אופיינית:	$\psi_X(t) = E\big(e^{itX}\big) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_X(x)dx$

טרנספורמציות של משתנה מקרי רציף

לעיתים נתונה $f_X(x)$ ופונקציה $Y = h(X)$,
ודרוש: $f_Y(y)$.

דרך אחת לביצוע הטרנספורמציה היא לעבור דרך פונקציית ההתפלגות:

$$f_X(x) \Rightarrow F_X(x) \Rightarrow F_Y(y) \Rightarrow f_Y(y)$$

והדרך השנייה מבצעת מעבר ישיר בין פונקציות הצפיפות:

אם $h(X)$ פונקציה חד-חד-ערכית:

$$f_Y(y) = f_X(h^{-1}(y)) \cdot \left|\frac{dh^{-1}(y)}{dy}\right|$$

ואם $h(X)$ לאו-דווקא חד-חד-ערכית:

$$f_Y(y) = \sum_{x:h(x)=y} f_X(x) \cdot \left|\frac{dx}{dy}\right|$$

דוגמה:

נתון $f_X(x) = \begin{cases} 2x & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$, $Y = X^2$

מצאו את פונקציית הצפיפות של Y.

דרך א':

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^2 & 0 \le x < 1 \\ 1 & 1 \le x \end{cases}$$

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(X^2 \le y) = P(X \le \sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y}) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ y & 0 \le y < 1 \\ 1 & 1 \le y \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \begin{cases} 1 & 0 \le y < 1 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

דרך ב':

בתחום הרלוונטי $h(X)$ היא חד-חד-ערכית,

$$Y = X^2 \quad \rightarrow \quad X = \sqrt{Y}$$

$$f_Y(y) = f_X(\sqrt{y}) \cdot \left|\frac{1}{2\sqrt{y}}\right| = \begin{cases} 2\sqrt{y} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} = 1 & 0 \le y < 1 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$